

# TD n°12: Théorie du potentiel

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini  
tserafini@dma.ens.fr

---

Les exercices marqués d'un 🐼† sont à faire en priorité, ceux marqués d'un 🦊† sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

---

On rappelle (ou admet) le théorème suivant :

**Théorème** (Caractérisation du potentiel logarithmique). Soit  $g : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty[$  une fonction semi-continue supérieurement telle que

(i)  $g$  est harmonique sur  $\mathbb{C} \setminus K$ ,

(ii)  $g(z) = \log |z| + O(1)$  quand  $z \rightarrow \infty$ ,

(iii)  $g(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \zeta \in \partial K$  pour  $\zeta$  en dehors d'un ensemble polaire.

Alors, sur  $\mathbb{C} \setminus K$ , on a :

$$g = U_{\mu_K} - I(\mu_K) = \log |z| - \log \text{Cap}(K) + o(1).$$

Une telle fonction est appelée fonction de Green de  $\mathbb{C} \setminus K$ .

## Potentiels et énergie.

---

### 🦊† Exercice 1. Inégalités énergie-potentiel.

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ ,  $\mu_K$  sa mesure d'équilibre. Soit également  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{C}$ .

1. Démontrer que si  $\text{Supp}(\nu) \subseteq K$ , alors

$$\inf_K U_\nu \leq I(\mu_K).$$

On exploite le fait que  $\nu(\mathbb{C}) = \nu(K) = 1$ , et on écrit

$$\begin{aligned} \inf_K U_\nu &= \int_K \inf_K U_\nu d\nu \\ &\leq \int_K U_\nu d\nu \\ &\leq I(\nu) \\ &\leq I(\mu_K) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est justifiée par  $I(\mu_K) = \sup_{\nu \in \mathcal{P}(K)} I(\nu)$ .

2. Démontrer à l'aide du théorème de Frostman que (sans supposition sur  $\text{Supp}(\nu)$ ), on a

$$\sup_K U_\nu \geq I(\mu_K).$$

Commençons par un lemme très utile : si  $\mu, \nu$  sont deux mesures boréliennes à support compact dans  $\mathbb{C}$ , alors

$$\int U_\nu d\mu = \int U_\mu d\nu.$$

Il s'agit en fait simplement d'une application de Fubini :

$$\int U_\nu d\mu = \iint \log |z - w| d\nu(z) d\mu(w) = \int U_\mu d\nu.$$

---

†Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \sup_K U_\nu &= \int_{\mathbb{C}} \sup_K U_\nu d\mu_K \\ &\geq \int_{\mathbb{C}} U_\nu d\mu_K \\ &\geq \int_{\mathbb{C}} U_{\mu_K} d\nu. \end{aligned}$$

Par le théorème de Frostman,  $\inf U_{\mu_K} = I(\mu_K)$ , et par conséquent  $\int_{\mathbb{C}} U_{\mu_K} d\nu \geq I(\mu_K)\nu(\mathbb{C})$ .

 **Exercice 2. Quelques potentiels.**

1. Démontrer que pour  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$

où  $\log^+ t$  désigne  $\max(\log(t), 0)$  et en déduire  $U_{\mu_{a,R}}$  pour  $\mu_{a,R}$  la mesure de Lebesgue normalisée du cercle de centre  $a$  et de rayon  $R$ .

Dans le cas  $|z| > 1$ , on applique simplement la formule de la moyenne à la fonction  $w \mapsto \log |z - w|$ , qui est définie au voisinage du disque unité car  $|z| > 1$ , et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log |z|.$$

Pour le cas  $|z| < 1$ , on écrit  $\log |z - w| = \log |1 - w/z| + \log |z|$ , et il suffit alors de prouver que

$$\int_0^{2\pi} \pi \log |1 - e^{i\theta}/z| d\theta = 2\pi \log |1/z|.$$

En remarquant que  $\log |1 - e^{i\theta}/z| = \log |e^{-i\theta} - 1/z|$  et en faisant un changement de variable  $\theta \rightarrow -\theta$ , on se retrouve avec l'intégrale

$$\int \log |e^{i\theta} - 1/z| d\theta = 2\pi \log |1/z|$$

par la première partie de la question.

Le cas  $|z| = 1$  est réglé par la continuité en  $z$  de l'intégrale.

Reste à calculer le potentiel de  $\mu_{a,R}$ , qui est donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z - a - Re^{i\theta}| d\theta &= \log(R) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z/R - a/R - e^{i\theta}| d\theta \\ &= \log(R) + \log^+ \left| \frac{z-a}{R} \right| \\ &= \max(\log(R), \log |z-a|). \end{aligned}$$

2. Calculer  $U_\mu$  pour  $\mu$  la mesure de Lebesgue du disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}$ .

On intègre en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} U_\mu(z) &= \int_{\overline{\mathbb{D}}} \log |z - w| d\mu(w) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log |z - re^{i\theta}| d\theta r dr \\ &= \int_0^1 2\pi \max(\log(r), \log |z|) r dr. \end{aligned}$$

Si  $|z| \geq 1$ , alors  $\max(\log(r), \log|z|) = \log|z|$  et l'intégrale s'évalue à  $\pi \log|z|$ . Si  $|z| < 1$ , il faut découper l'intégrale :

$$U_\mu(z) = 2\pi \int_0^{|z|} r \log|z| dr + \int_{|z|}^1 r \log(r) dr.$$

La première intégrale s'évalue à  $\pi|z|^2 \log|z|$ , pour la deuxième on peut déterminer que  $\pi r^2 \log(r) - \frac{\pi r^2}{2}$  est une primitive, et la deuxième intégrale s'évalue donc à  $-\frac{\pi}{2} - \pi|z|^2 \log|z| + \frac{\pi|z|^2}{2}$ . En additionnant tout, on trouve

$$U_\mu(z) = \pi \log^+ |z| + \min\left(\frac{\pi}{2}(|z|^2 - 1), 0\right).$$

Ce n'était pas demandé, mais on peut utiliser ce calcul explicite pour calculer l'énergie de  $\mu$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} U_\mu(z) d\mu(z) &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 - 1) d\theta r dr \\ &= \pi^2 \int_0^1 (r^3 - r) dr \\ &= -\frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$\mu$  n'est pas exactement une mesure de probabilité vu que sa masse est  $\pi$ . On a  $I(\mu/\pi) = I(\mu)/\pi^2 = -\frac{1}{4}$  qui est bien inférieure à  $I(\mu_{0,1}) = 0$ .

### Exercice 3. Inégalité dans le théorème de Frostman.

Soit  $K$  un compact non-polaire de  $\mathbb{C}$  et  $E \subseteq \mathbb{C} \setminus K$  polaire tel que  $K' = K \cup E$  est compact. Soient  $\mu_K, \mu_{K'}$  les mesures d'équilibre de  $K, K'$ .

1. Démontrer que  $I(\mu_{K'}) > -\infty$ .

Comme  $K$  est non-polaire, il admet une unique mesure d'équilibre  $\mu_K$ . Cette mesure est supportée dans  $K'$  et a une énergie  $> -\infty$ , donc  $K'$  est non-polaire et  $\mu_{K'}$  est bien unique, d'énergie  $> -\infty$ .

2. Démontrer que  $\mu_{K'}(E) = 0$ , et en déduire que  $\mu_K = \mu_{K'}$ .

On procède par l'absurde. Si jamais  $\mu_{K'}(E) > 0$ , alors  $\frac{1}{\mu(E)} \mu|_E$  est une mesure non-nulle sur  $E$ , et alors son énergie est  $-\infty$ .

Il suffit alors de vérifier que

$$\int_{K'} \int_{K'} = \int_K \int_K + \int_K \int_E + \int_E \int_K + \int_E \int_E$$

où l'intégrande est supposé être  $\log|z-w| d\mu_{K'}(z) d\mu_{K'}(w)$ . Si la dernière intégrale vaut  $-\infty$  alors la somme vaut  $-\infty$ , ce qui contredit  $I(\mu_{K'}) > -\infty$ .

La mesure d'équilibre de  $K'$  est donc supportée sur  $K$ , et elle donc égale à  $\mu_K$ .

3. Démontrer que si  $K = \overline{\mathbb{D}}$ , alors  $U_{\mu_{K'}} > I(\mu_{K'})$  sur  $E$ .

Si  $K = \overline{\mathbb{D}}$ , la mesure d'équilibre est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle, son potentiel est  $\log^+ |z|$  et son énergie est 0.

Etant donné que  $E$  est disjoint de  $\overline{\mathbb{D}}$ ,  $\log^+ |z| > 0$  pour  $z \in E$ .

## Capacités et diamètres transfinis.

---



### Exercice 4. Quelques capacités.

Pour cet exercice, on admet le résultat de l'exercice 7.

1. Calculer la capacité de l'anneau  $r \leq |z| \leq R$ .

L'anneau  $A_{r,R}$  contient le cercle de rayon  $R$  et est contenu dans le disque fermé de rayon  $R$ . Comme la capacité est croissante, on a

$$R \leq \text{Cap}(A_{r,R}) \leq R.$$

2. Calculer en termes de la capacité du segment  $[0, 1]$  la capacité du hérissou

$$H = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[ 0, e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right].$$

En déduire la capacité du segment  $[0, 1]$  en l'appliquant à  $n = 2$ , en admettant qu'elle n'est pas nulle. On écrit  $H = q^{-1}([0, 1])$ , avec  $q(z) = z^n$ . L'application de la formule de l'exercice 7 donne

$$\text{Cap}(H) = \text{Cap}([0, 1])^{\frac{1}{n}}.$$

Remarquons que l'on peut calculer la capacité de  $[0, 1]$  avec ce résultat : en effet, pour  $n = 2$  on a  $H = [-1, 1]$ . La capacité étant invariante par translation, on a  $\text{Cap}(H) = \text{Cap}([0, 2]) = \text{Cap}(2[0, 1])$ .

Il faut maintenant démontrer que pour  $s \in \mathbb{C}^*$ , on a  $\text{Cap}(sK) = |s| \text{Cap}(K)$ . On remarque pour ce faire que si  $\mu$  est une mesure de probabilité supportée sur  $K$ , alors  $s_*\mu$ , donnée par  $s_*\mu(K) = \mu(s^{-1}K)$  est une mesure de probabilité supportée sur  $sK$  et on a

$$I(s_*\mu) = \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| ds_*\mu(z) ds_*\mu(w) = \int_{\mathbb{C}} \log (sz - sw) d\mu(z) d\mu(w) = I(\mu) + \log |s|.$$

On en déduit, par unicité de la mesure d'équilibre que  $s_*\mu_K = \mu_{sK}$  et donc que  $\text{Cap}(sK) = |s| \text{Cap}(K)$ . Revenant au segment, on trouve  $2\text{Cap}([0, 1]) = \sqrt{\text{Cap}([0, 1])}$ , ce qui implique  $\text{Cap}([0, 1]) = 0$  ou  $\text{Cap}([0, 1]) = 1/4$ . On verra dans l'exercice suivant que  $\text{Cap}([0, 1]) > 0$ .

3. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  vérifiant  $q^{-1}(K) = K$  pour un polynôme  $q$ . Démontrer que soit  $K$  est polaire, soit  $\text{Cap}(K) = |a_d|^{-\frac{1}{d}}$ , où  $d$  est le degré de  $q$  et  $a_d$  son coefficient dominant. Utiliser ce résultat pour retrouver la capacité du cercle et du disque.

Il suffit d'appliquer la formule et d'écrire

$$\text{Cap}(K) = \text{Cap}(q^{-1}(K)) = \left( \frac{\text{Cap}(K)}{|a_d|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Cette équation a deux solutions réelles, à savoir 0 et  $|a_d|^{-\frac{1}{d}}$ , ce qui conclut.

4. On admet (c'est une généralisation du raisonnement fait dans un TD précédent) que  $z \mapsto z + \frac{1}{z}$  envoie  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, r)$ ,  $r > 1$ , sur  $\mathbb{C} \setminus E_{a,b}$ , où  $E_{a,b}$  est l'ellipse de demi-axes  $a = r + 1/r$ ,  $b = r - 1/r$ , c'est-à-dire définie par  $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ .

Démontrer que pour  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , la capacité de l'ellipse  $E_{a,b}$  de demi-axes  $a, b$  est

$$\text{Cap}(E_{a,b}) = \frac{a+b}{2}.$$

Pour calculer la capacité d'une ellipse générale  $E_{a,b}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , on peut commencer par supposer  $a > b$  par symétrie rotationnelle. Ensuite, on peut remarquer qu'il existe  $r > 1, s > 0$  tels que  $a = s(r + \frac{1}{r})$ ,  $b = s(r - \frac{1}{r})$ .  $r$  est donné par l'équation  $\frac{a}{b} = \frac{r^2+1}{r^2-1}$  (qui admet toujours une unique solution  $r > 1$ ), et  $s$  se trouve comme  $a/(r + 1/r)$ . Comme  $\text{Cap}(sK) = s\text{Cap}(K)$ , il suffit de calculer  $\text{Cap}(E_{a,b})$  pour  $a = r + \frac{1}{r}$ ,  $b = r - \frac{1}{r}$ .

Pour ce faire, on utilise la caractérisation du potentiel logarithmique. Soient  $U, V$  les complémentaires de  $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$  et  $E_{a,b}$  respectivement. Soient  $g_U, g_V$  les fonctions de Green de  $U$  et  $V$ , et  $\varphi(z) = z + \frac{1}{z}$  : on va montrer que  $g_V \circ \varphi = g_U$  - rappelons par ailleurs que  $g_U(z) = \log |z| - \log(r)$ .

Pour ce faire, on utilise la caractérisation de la fonction de Green. Comme  $g_V$  est harmonique,  $g_V \circ \varphi$  est harmonique. On a ensuite  $g_V(\varphi(z)) = \log |\varphi(z)| + O(1)$ . On vérifie sans encombre que  $\log |z + 1/z| = \log |z| + \log |1 + 1/z^2| = \log |z| + o(1)$ , et donc  $g_V(\varphi(z)) = \log |z| + O(1)$ .

Finalement, comme  $\varphi$  envoie  $\partial\overline{\mathbb{D}}(0, r)$  sur  $\partial E_{a,b}$  et que  $g_V(w) \rightarrow 0$  quand  $w \rightarrow$  un point de  $\partial E_{a,b}$  (sauf éventuellement sur un ensemble polaire), on a bien  $g_V(\varphi(z)) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \zeta \in \partial\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ . On en conclut que  $g_V \circ \varphi = g_U$ . On sait que  $g_U(z) = \log |z| - \log(r)$ , et  $g_V(\varphi(z)) = \log |z| + o(1) - \log \text{Cap}(E_{a,b}) + o(1)$ , donc

$$\text{Cap}(E_{a,b}) = r = \frac{a+b}{2}.$$

Ceci conclut.

Remarque : il n'y a rien de spécial avec  $\mathbb{D}$  et  $E_{a,b}$  : si  $\varphi$  est un biholomorphisme de  $\mathbb{C} \setminus K$  sur  $\mathbb{C} \setminus K'$ , alors par le même argument (avec peut-être un petit argument supplémentaire pour gérer les bords) on trouve  $\text{Cap}(K) = |a| \text{Cap}(K')$ , avec  $a$  tel que  $\varphi(z) = az + O(1)$ .

### Exercice 5. Inégalités de diamètres transfinis.

1. Soient  $X, Y$  deux compacts métriques, et  $f : X \rightarrow Y$  une application  $A$ -lipschitzienne surjective. Démontrer que

$$\tau(Y) \leq A\tau(X).$$

On a

$$\tau(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y_1, \dots, y_n} \left( \prod_{i < j} d_Y(y_i, y_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x_1, \dots, x_n} \left( \prod_{i < j} d_Y(f(x_i), f(x_j)) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

car  $f$  est surjective. En écrivant  $d_Y(f(x_i), f(x_j)) \leq Ad_X(x_i, x_j)$ , on trouve bien  $\tau(Y) \leq A\tau(X)$ .

2. En déduire que  $\tau([0, 1]) \geq \frac{1}{2\pi}$ .

On considère  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{U}$  donnée par  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ . C'est une application surjective, et elle vérifie

$$|e^{2i\pi s} - e^{2i\pi t}| = \sqrt{2 - 2\cos(2\pi(s-t))} \leq 2\pi|s-t|$$

car  $\cos(\theta) \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ . L'exponentielle est  $2\pi$ -lipschitzienne, et donc  $1 = \tau(\mathbb{U}) \leq 2\pi\tau([0, 1])$ .

### Exercice 6. Capacité et mesure de Lebesgue.

Soit  $\mu$  une mesure borélienne à support compact sur  $\mathbb{C}$  vérifiant  $I(\mu) > -\infty$  et  $E$  un borélien de  $\mathbb{C}$ .

1. (a) Supposons que  $\mu(E) > 0$ . Démontrer qu'il existe un compact  $K \subseteq E$  vérifiant  $\mu(K) > 0$  et

$$I(\mu|_K) \geq I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log(d)$$

où  $d$  est le diamètre de  $\text{Supp}(\mu)$ .

On utilise la régularité inférieure de  $\mu$ , qui dit que  $\mu(E) = \sup_{K \subseteq E} \mu(K)$ . On trouve donc  $K$  vérifiant  $\mu(K) > 0$ .

Pour démontrer que  $I(\mu|_K) \geq I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log(d)$ , on remarque tout d'abord que  $\log \left| \frac{z-w}{d} \right| \leq 0$  pour  $z, w \in \text{Supp}(\mu)$ . Il s'ensuit que

$$\iint_{K \times K} \log \left| \frac{z-w}{d} \right| d\mu(z) d\mu(w) \geq \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \log \left| \frac{z-w}{d} \right| d\mu(z) d\mu(w)$$

puisque le terme de gauche est pris sur un sous-ensemble du support, et l'intégrande est négatif sur le support. Le terme de gauche s'évalue à  $I(\mu|_K) - \log(d)\mu(K)^2$  et celui de droite est  $I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d)$ .

- (b) En déduire que  $E$  est non-polaire.

Comme  $I(\mu) > -\infty$ , on a  $I(\mu|_K) > -\infty$ . Comme  $\mu|_K$  n'est pas nulle, on trouve que  $K$  n'est pas polaire, et donc  $E$  non plus.

2. En déduire qu'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbb{R}$ , resp. de  $\mathbb{U}$ ) de mesure de Lebesgue  $> 0$  n'est jamais polaire.

Il suffit en vertu du résultat ci-dessus de vérifier que  $\lambda_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{D}(0,R)}$  a une énergie non-nulle pour tout  $R$ , car  $\lambda_{\mathbb{C}}(B) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \lambda_{\mathbb{C}}(B \cap \mathbb{D}(0, R))$ .

Ce fait a déjà été vérifié à l'exercice 2. Pareil pour la mesure de Lebesgue du cercle, et pour celle de  $\mathbb{R}$  il faut considérer des intervalles de plus en plus grands, et on peut prouver sans trop de peine que la capacité d'un intervalle est positive (ça découle de l'intégrabilité du log).

### Exercice 7. Capacité d'une image inverse par un polynôme.

Soit  $q(z) = a_d z^d + \dots + a_0$  un polynôme à coefficients complexes,  $K \subseteq \mathbb{C}$  un compact non-polaire. On note  $U = \mathbb{C} \setminus K$ ,  $V = \mathbb{C} \setminus q^{-1}(K)$ . On note respectivement  $g_U$  et  $g_V$  les fonctions de Green de  $U$  et  $V$ .

1. Vérifier que  $q(V) = U$  et  $q(q^{-1}(K)) = K$ , et démontrer que  $q(\partial q^{-1}(K)) = \partial K$ .  $q(V) = U$  est vrai par construction, et on sait que  $q(q^{-1}(K)) = K$  car  $q$  est surjective (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss). On commence par démontrer que  $q(\partial q^{-1}(K)) \subseteq \partial K$ . On a que  $\partial q^{-1}(K) = \overline{V} \cap q^{-1}(K)$  et  $\partial K = \overline{U} \cap K$ . Comme  $q$  envoie  $V$  dans  $U$ , elle envoie  $\overline{V}$  dans  $\overline{U}$ . On a alors

$$q(\overline{V} \cap q^{-1}(K)) \subseteq q(\overline{V}) \cap K \subseteq \overline{U} \cap K = \partial K.$$

Comme  $q$  est ouverte, on a également  $q^{-1}(\partial K) \subseteq \partial q^{-1}(K)$ , et en appliquant  $q$ ,  $q(q^{-1}(\partial K)) = \partial K \subseteq q(\partial q^{-1}(K))$ , ce qui conclut.

2. Vérifier que  $g_U(q(z))$ , définie sur  $\mathbb{C}$ , est nulle sur  $q^{-1}(K)$  sauf peut-être en un sous-ensemble polaire du bord, et harmonique sur  $V$ .

La composée d'une fonction harmonique par une fonction holomorphe reste harmonique. Reste à voir  $g_U \circ q \rightarrow 0$  sur le bord.

C'est une conséquence directe de  $q(\partial q^{-1}(K)) \subseteq \partial K$  : comme  $g_V$  est une fonction de Green de  $V$ ,  $g_V(z) \rightarrow 0$  partout sur  $\partial K$  sauf sur un ensemble polaire  $E$ , et donc  $g_U(q(z)) \rightarrow 0$  sauf sur  $q^{-1}(E)$ . Il faut vérifier que  $q^{-1}(E)$  est polaire pour  $E$  polaire. Soit  $F = q^{-1}(E)$ , on a  $q(F) = E$ . On sait que  $q : q^{-1}(K) \rightarrow K$  est localement Lipschitz (car dérivable), elle est donc globalement Lipschitz, de constante  $A$ . D'après l'exercice 5, on a donc

$$\tau(F) \leq A\tau(q(F)) = 0$$

et donc  $\tau(F) = \text{Cap}(F) = 0$ .

3. En déduire que  $g_U(q(z)) = dg_V(z)$ .

Il suffit de vérifier que  $\log |q(z)| = d \log |z| + \log |a_d| + o(1)$ , et donc  $\frac{1}{d}g_U(q(z))$  vérifie toutes les conditions pour être la fonction de Green de  $V$ .

4. En déduire finalement que

$$\text{Cap}(q^{-1}(K)) = \left( \frac{\text{Cap}(K)}{|a_d|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

On écrit  $g_V(z) = \log |z| - \log \text{Cap}(q^{-1}(K)) + o(1)$ , et  $g_U(q(z)) = \log |q(z)| - \log \text{Cap}(K) + o(1) = d \log |z| + \log |a_d| - \log \text{Cap}(K) + o(1)$ . L'égalité  $g_U(q(z)) = dg_V(z)$  devient alors

$$-d \log \text{Cap}(q^{-1}(K)) = \log |a_d| - \log \text{Cap}(K)$$

qui devient exactement l'égalité voulue après division par  $d$  et exponentiation.

### Exercice 8. Capacités de Cantors

Soit  $\mathbf{s} = (s_n)_n$  une suite de nombres réels strictement compris entre 0 et 1. On définit récursivement  $C() = [0, 1]$ , et

$$C(s_1, \dots, s_n) = \left( \frac{1-s_1}{2} C(s_2, \dots, s_n) \right) \cup \left( \frac{1+s_1}{2} + \frac{1-s_1}{2} C(s_2, \dots, s_n) \right).$$

On définit  $C(\mathbf{s}) = \bigcap_{n \geq 1} C(s_1, \dots, s_n)$ . On pose finalement

$$p = \prod_{n \geq 1} (1-s_n)^{\frac{1}{2^n}}, \quad q = \prod_{n \geq 1} s_n^{\frac{1}{2^n}}.$$

Pour cet exercice, on utilisera librement les inégalités (1) et (2) de l'exercice suivant.

1. Démontrer que

$$\log \text{Cap}(C(s_1, \dots, s_n)) \leq \frac{1}{2} \log \text{Cap}(C(s_2, \dots, s_n)) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-s_1}{2} \right).$$

2. En déduire que

$$\log \text{Cap}(C(\mathbf{s})) \leq \log(p) - \log(2).$$

3. Similairement, démontrer que

$$\log \text{Cap}(C(s_1, \dots, s_n)) \geq \frac{1}{2} \log(s_1) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-s_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \log \text{Cap}(C(s_2, \dots, s_n)).$$

4. En déduire que

$$\log \text{Cap}(C(s)) \geq \log(pq) - \log(2).$$

### Exercice 9. Estimations de capacités

Le but de cet exercice est de prouver deux inégalités : soient  $K_1, K_2$  deux compacts,  $K = K_1 \cup K_2$  leur union. On a

$$\frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K))} \leq \frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(\delta/\text{Cap}(K_2))} \quad (1)$$

et

$$\frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K))} \geq \frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log^+(d/\text{Cap}(K_2))} \quad (2)$$

où  $\delta$  est le diamètre de  $K$  et  $d$  la distance entre  $K_1$  et  $K_2$ . On note  $\mu$  la mesure d'équilibre de  $K$  et  $\mu_j$  celle de  $K_j$ .

1. On commence par la première inégalité.

(a) Justifier qu'il suffit de prouver l'inégalité pour  $\delta = 1$ , et qu'on a alors  $\text{Cap}(K) \leq 0$ .

(b) Démontrer que pour  $j = 1, 2$ , on a

$$I(\mu) \leq \int_{\mathbb{C}} U_{\mu} d\mu_j.$$

(c) En déduire que

$$I(\mu) \leq \int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu.$$

(d) Démontrer que  $\int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu = \mu(K_j)I(\mu_j)$ .

(e) En déduire que

$$-\frac{\mu(K_1) + \mu(K_2)}{I(\mu)} \leq -\frac{1}{I(\mu_1)} - \frac{1}{I(\mu_2)}$$

puis que

$$\frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K))} \leq \frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(1/\text{Cap}(K_2))}.$$

2. On montre la deuxième inégalité.

(a) Vérifier qu'il suffit de le prouver pour  $d = 1$ .

(b) Vérifier que si  $\text{Cap}(K) \geq 1$  ou  $K_j$  est polaire, l'égalité est trivialement vérifiée. On suppose à partir de maintenant que  $0 < \text{Cap}(K_j) \leq \text{Cap}(K) < 1$ .

(c) On pose  $t = \frac{I(\mu_1)}{I(\mu_1) + I(\mu_2)}$ , et

$$\nu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2.$$

Vérifier que  $\nu$  est une mesure de probabilité supportée sur  $K$  et vérifiant

$$I(\nu) \geq (1-t)^2 I(\mu_1) + t^2 I(\mu_2).$$

(d) En déduire que

$$I(\mu) \geq \frac{I(\mu_1)I(\mu_2)}{I(\mu_1) + I(\mu_2)}$$

et conclure.

Pour la correction des exercices 8 et 9, on pourra consulter Potential Theory in the complex plane de Thomas Ransford, plus particulièrement les théorèmes 5.1.4 et 5.3.7